1. SEM.: • W.V.: spojitá fce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nabývá max, min.

• Spojitá fce $f: K\subseteq\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, kde K je kompaktní, nabývá max, min.

• $K\subseteq\mathbb{R}^d$ je komp. $\iff$ K je uz. $\wedge$ K je om.

Příklad: $f(x,y)=x+2y+\frac{3}{4}x^2+xy+2y^2$

$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2-2\le x\le 2-y^2\}$

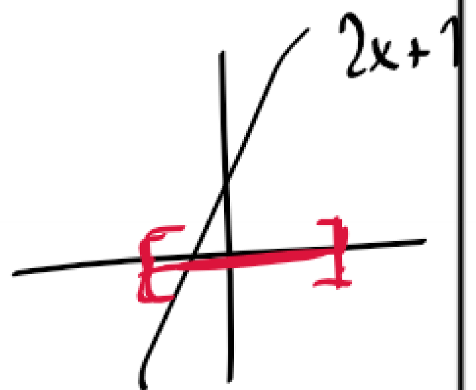
Vyšetřete extrémy funkce f přes M.

Pozn.: $f(x)=2x+1$, $M=[-1,2]$.

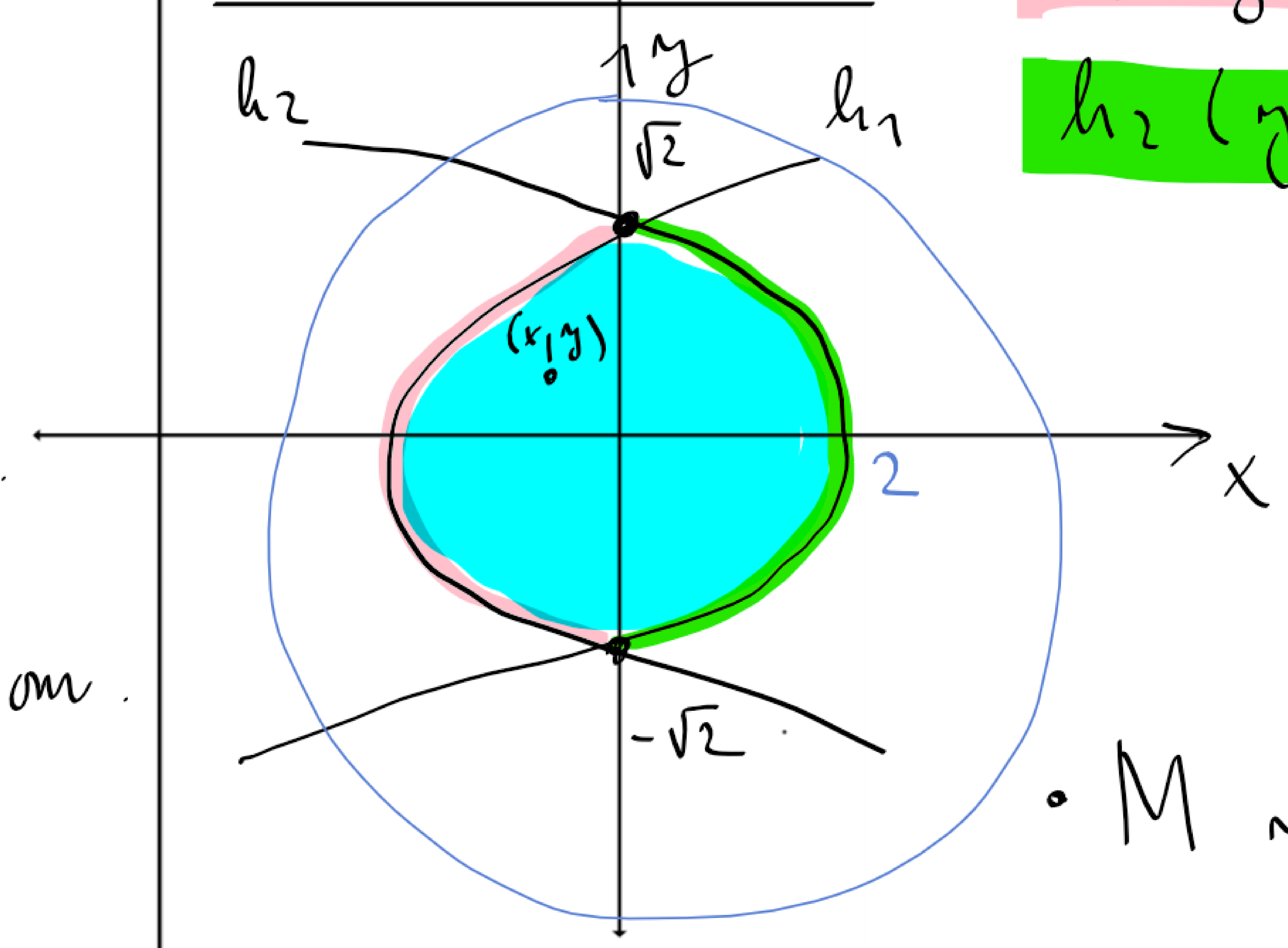
f nemá extrémy na $\mathbb{R}$, ale má je na M.

f je rostoucí $\Rightarrow$ $\min\limits_{x\in M} f(x)=f(-1)=-1$

$\max\limits_{x\in M} f(x)=f(2)=5$



Vlastnosti M: $h_1(y)=y^2-2$, $h_2(y)=2-y^2$



$2-y^2=0 \iff$
$y^2=2 \iff$
$y=\sqrt{2} \vee y=-\sqrt{2}$

• M není ot. (obsahuje b. hr.)

• $H(M)=(\ \cup\ )\subseteq M$, tedy M je uz.

• M je kompaktní? Ano, neboť je uz. a (triviálně) i omezená.

$\Longrightarrow$ f nabývá na M svého max i min.

PB z extrémů: jisté body hranice (později); stacionární b. f uvnitř M.

<u>Stac. bod</u> fce $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ je bod $a\in\mathbb{R}^d$ takový, že $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=0$, $i=1,\dots,d$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x+2y+\frac{3}{4}x^2+xy+2y^2\right) =$$
$$= 1+0+\frac{3}{2}x+1\cdot y+0 =$$
$$= \frac{3}{2}x+y+1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2+x+4y$$

S.B.:
$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{2}x+y &= -1 \\ x+4y &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 5y &= -2 \\ y &= -\frac{2}{5} \\ x &= -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

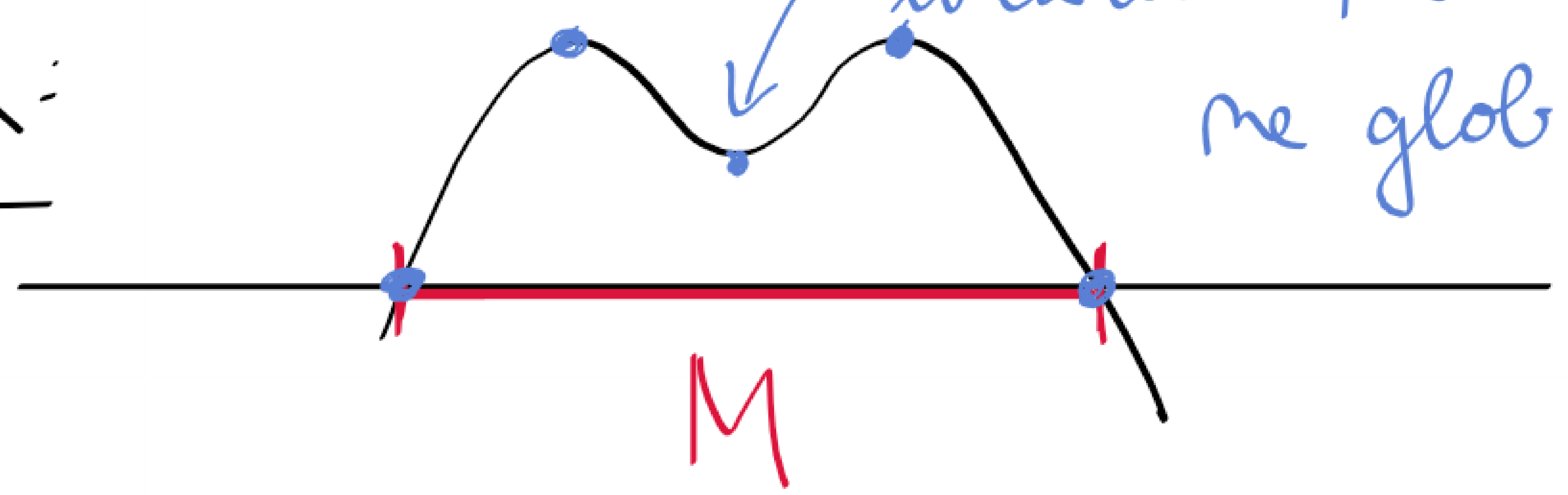
Vidíme, že fce f má jediný SB, a to bod $\left[-\frac{2}{5},-\frac{2}{5}\right]$.

$\left[-\frac{2}{5},-\frac{2}{5}\right]\in M$. Stačí dosadit; platí to.

Je to bod extrému? A priori to není jasné.

<u>Pozn.:</u> nemusí jít o b. ext. přes M a přesto tam může být lokální ext.

<u>1-DIM OBR:</u>



lokální minimum, ne glob. přes M.

Extrémy přes $H(M)$ ... hledání dalších PB:

$$\varphi_1(y) = (h_1(y), y), \quad y\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$$
$$= (y^2-2, y)$$

$$\varphi_2(y) = (h_2(y), y) = (2-y^2, y),$$

$\varphi_1(y) = (y^2-2, y)$, $\varphi_2(y) = (2-y^2, y)$

$y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Nyní složíme f s těmito křivkami φ_1, φ_2 ⇝ fce 1-prom.

$$f\circ\varphi_1(y) = f(\varphi_1(y)) = f(y^2-2, y) =$$

$$= \cancel{y^2}\cancel{-2} + \cancel{2y} + \frac{3}{4}(y^2-2)^2 + (y^2\cancel{-2})\cdot y + \cancel{2y^2} =$$

$$= \cancel{3y^2} + 1 + \frac{3}{4}y^4 - \cancel{\frac{3}{4}\cdot 4y^2} + y^3 =$$

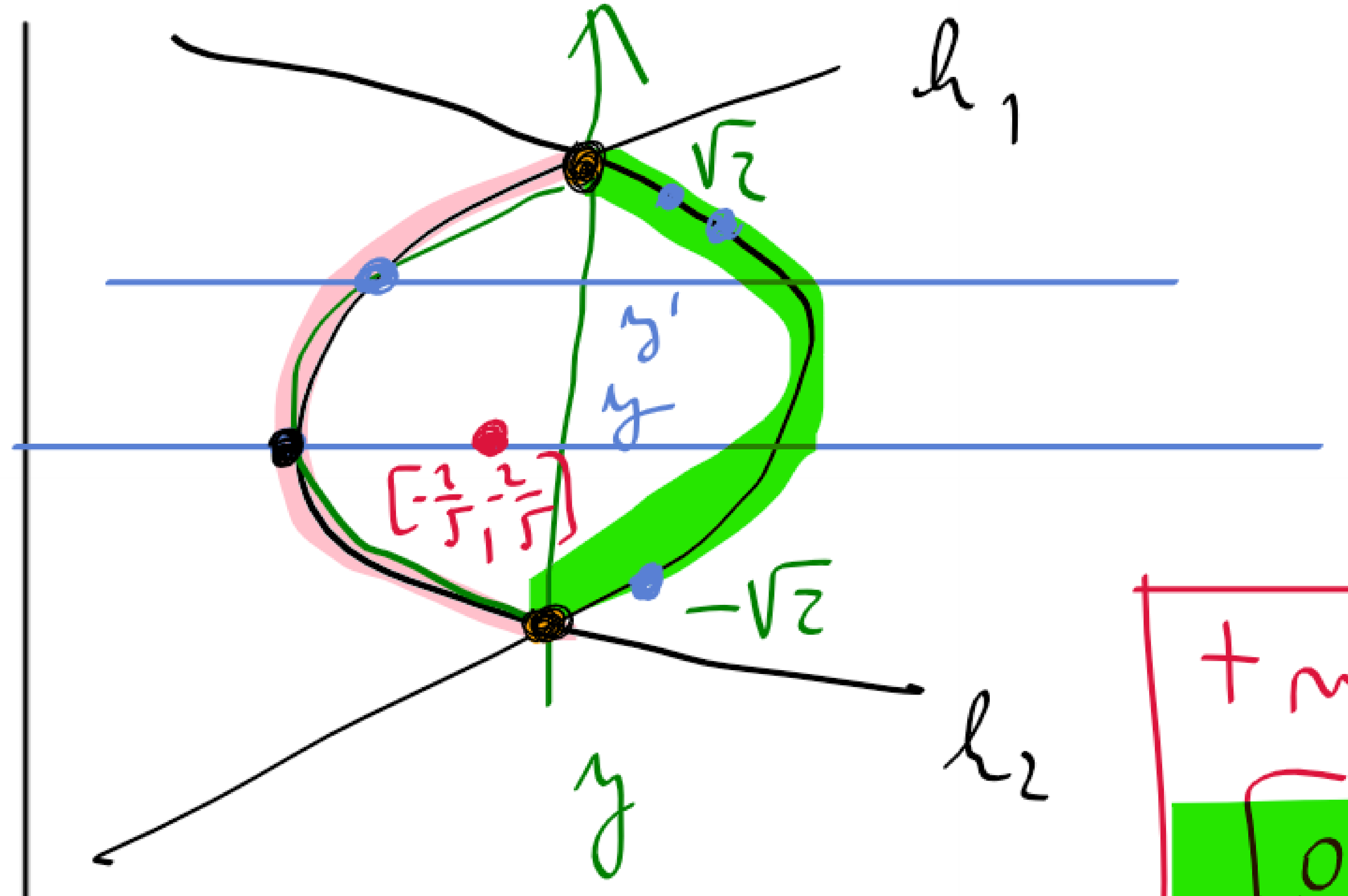
$$= \frac{3}{4}y^4 + y^3 + 1 = g_1(y)$$

$$g_1'(y) = 3y^3 + 3y^2 = 3y^2(y+1) = 0$$

$$\iff y = 0 \ \vee \ y = -1$$

⇝ P.B.: $\varphi_1(0)$, $\varphi_1(-1)$, tj.

$[-2, 0]$, $[-1, -1]$.



$$f\circ\varphi_2(y) = f(\varphi_2(y)) =$$

$$= f(2-y^2, y) =$$

+ nesmíme opomenout PB: $[0, -\sqrt{2}]$, $[0, \sqrt{2}]$

$$= 2-y^2 + 2y + \frac{3}{4}(2-y^2)^2 + (2-y^2)y + 2y^2 =$$

$$= (2-y^2)\cdot\left(1 + \frac{3}{4}(2-y^2) + y\right) + 2y(1+y) =$$

$$= (2-y^2)\cdot\left(-\frac{3}{4}y^2 + y + \frac{5}{2}\right) + 2y(1+y) = g_2(y)$$

$$= \dots = \frac{3}{4}y^4 - y^3 - 2y^2 + 4y + 5 = g_2(y).$$

$$g_2'(y) = 3y^3 - 3y^2 - 4y + 4 =$$

$$= 3y^2(y-1) - 4(y-1) =$$

$$= (y-1)(3y^2-4) = 0 \iff y = 1 \ \vee \ y = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

P.B: $[1,1]$, $\left[\frac{2}{3}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right]$.

Nyní vyhodnotíme fce f ve všech P.B.
$\Rightarrow$ uvidíme max i minimum přes M.

Q1: Je jisté, že se dozvíme, zda v bodě $[\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}]$ je lok. extrém.

A: NE. Pokud by totiž nešlo o extrém přes M, nemuselo by jít ani o lok. extr.

Q2: Pokud $[\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}]$ je bod extrému fce f přes M, plyne z toho neslyšitelně, že je to bod ostrého lokálního extrému?

A: ANO. Neostrý extrém je jasný.

f je polynom $\Rightarrow$ má všechny P.D. všech řádů spojité ($f \in C^\infty$)

Kdyby bod $[4/5, -2/5]$ nebyl b. ostrého lok. extrému, pak libovolně blízko by existovaly jiné body (a), které jsou taky extrémy. Ale protože P.D. $\exists$, byly by to stac. body.

Ale SB pro f je právě jeden!

Takové body a tedy neexistují.

$\rightarrow$ našli jsme všechna řešení soustavy (zde lin.) rovnic $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Existuje algoritmus, jak s vysokou úspěšností rozpoznávat lok. extrémy:

---

1. DIM: Postačující podmínky 2. řádu:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f'': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $f'(a) = 0 \wedge f''(a) > 0 \implies$

Pak f má v bodě $\underline{a}$ MIN.

$\left[\bullet \; f'(a) = 0 \wedge f''(a) < 0 \implies \dots \text{ MAX.}\right]$

V našem případě: 2-proměnné.

$$d^2 f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)_{i,j=1}^{d} \qquad (d=2)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2 + x + 4y) = 1$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(1 + \frac{3}{2}x + y\right) = 1$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \frac{3}{2}x + y\right) = \frac{3}{2}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(2 + x + 4y) = 4$$

$$d^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Z vlastností této (tzv. Hessovy matice) lze odhodit chování fce f ve SB $\left[-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right]$

2×2:

- $\begin{bmatrix} \boxed{>0} & \\ & \end{bmatrix} \land \det > 0 \iff$ PD

- $\begin{bmatrix} \boxed{<0} & \\ & \end{bmatrix} \land \det > 0 \iff$ ND

- $\neg$PD $\land$ $\neg$ND $\land$ regulární $\Longrightarrow$ ID

Stručně
PD $\Rightarrow$ min.
ND $\Rightarrow$ max.
ID $\Rightarrow$ není lok. extrém.

V našem případě $A = \begin{pmatrix} \overset{>0}{\frac{3}{2}} & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\det A = \frac{3}{2} \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 5 > 0$ $\Big\} \Rightarrow$ PD

Celkem: V bodě $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ je lokální min.

Symetrické maticové úpravy:

[provedu úpravu na řádky
$\Rightarrow$ tutéž úpravu na sloupce] ... SYM. ÚPRAVA

- Platí: Sym. úprava sym. mce $\rightsquigarrow$ sym. mce.

- Vhodnými $\overset{\text{sym.}}{\vee}$ úpravami lze libovolnou sym. matici převést na diagonální. Z diag. mce je definitnost jasná.

$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \overset{>0}{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \overset{>0}{5} \end{pmatrix}$ matice je PD.

$3/2 \cdot (2) - (1)$